

Fortgeschrittenen–Praktikum  
2. Physikalisches Institut  
Seminar–Material  
Versuch 21  
Mikrowellen

Marcus Rickert      Eike Ulbrich

25. November 1990

# Mikrowellen

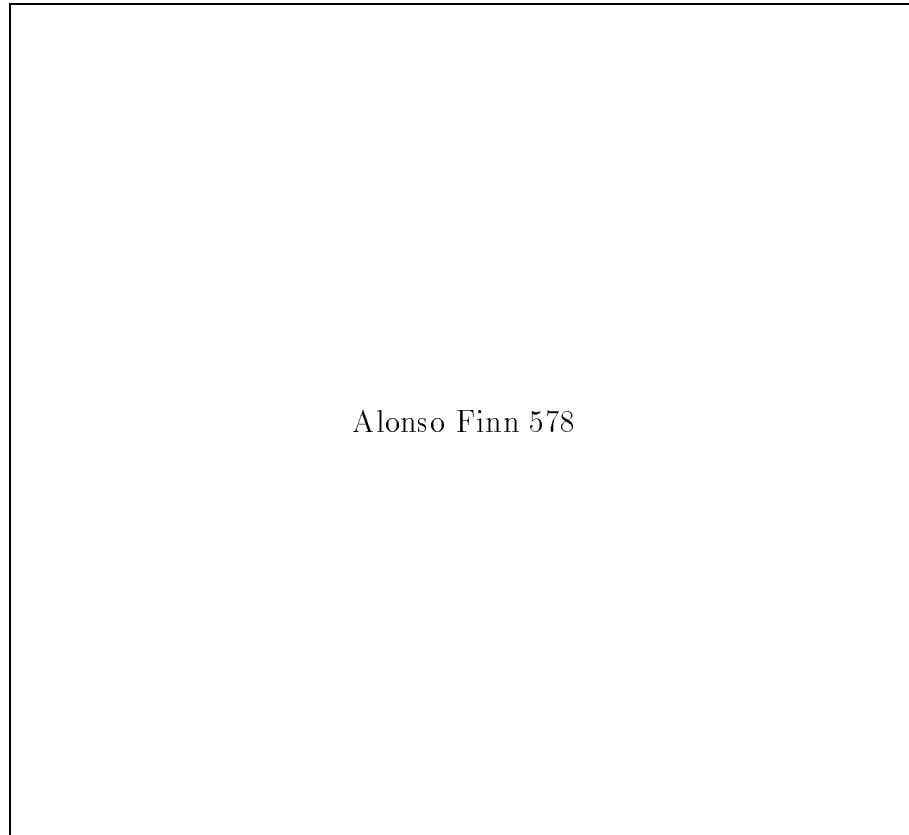


Abb.1 Elektromagnetisches Spektrum

- 1 Erzeugung von Mikrowellen**
- 2 Wellenausbreitung in Hohlleitern**
- 3 Dielektrizitätskonstante**
- 4 Anwendung**
  - 4.1 Bestimmung der DK einiger Kunststoffe**
  - 4.2 Radarkontrolle durch Doppler-Effekt**

## 5 Impatt-Diode (Lawinenlaufzeitdiode)

### Impact-Avalanche-Transit-Time-Diode

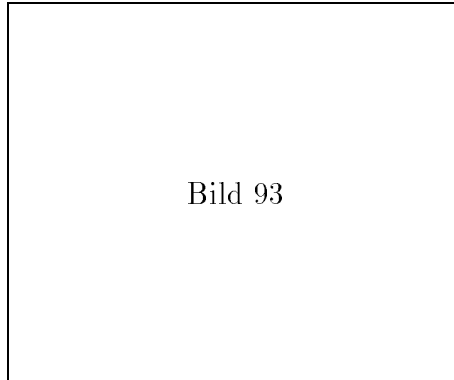
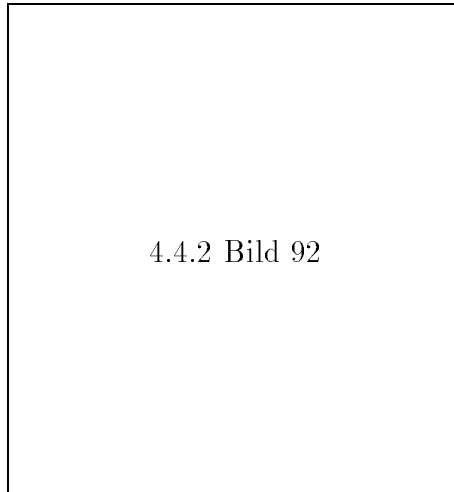


Bild 93

Abb.2 Schema



4.4.2 Bild 92

Abb.3  $p^+nn^+$ -Impatt-Diode

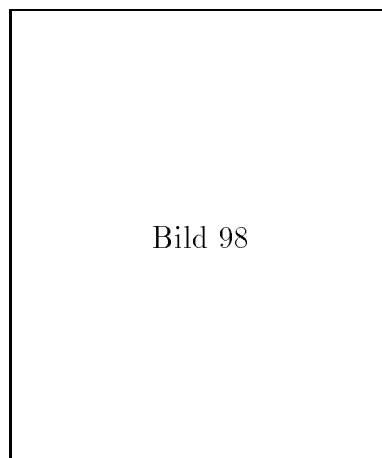


Bild 98

Abb.4 Spannung und Strom

# Erzeugung von Mikrowellen

Leistungskurve des Generators

Versuchsaufbau

## Theorie der Hohlleiter

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad \nabla \vec{H} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -i\omega \vec{H} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$$

Wellengleichung

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.$$

Ansatz

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0(x, y)e^{-\gamma z}$$

Zerlegung

$$\Delta \vec{H} = \Delta_{tr} \vec{H} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{H} \quad \vec{H}_0 = \vec{H}_{0tr} + H_{0z} \vec{e}_z$$

Neue Wellengleichung

$$\Delta_{tr} H_{0z} + (\gamma^2 + k_{tr}^2) H_{0z} = 0$$

$$\vec{H} = \left( -\frac{\gamma}{\gamma^2 + k_{tr}^2} \nabla_{tr} H_{0z} + H_{0z} \vec{e}_z \right) e^{-\gamma z}$$

Grenzwellenzahl

$$h^2 := \gamma^2 + k_{tr}^2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \sqrt{h^2 - k_{tr}^2}$$

Hohlleiter-Wellenlänge

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\nu}{c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

## Moden

Ansatz

$$H_{0z}(x, y) = f(x)g(y)$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2}{dx^2} f + \frac{1}{g} \frac{d^2}{dy^2} g + (\gamma^2 + k_{tr}^2) = 0$$

Randbedingungen

$$E_{0z}|_{x=0} = E_{0z}|_{x=a} = E_{0z}|_{y=0} = E_{0z}|_{y=b} = 0$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial x} H_{0z} \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} H_{0z} \Big|_{x=a} = \frac{\partial}{\partial y} H_{0z} \Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y} H_{0z} \Big|_{y=b} = 0$$

Lösung

$$g = A \sin(c_1 x) + B \cos(c_1 x)$$

$$f = \tilde{A} \sin(c_2 x) + \tilde{B} \cos(c_2 x)$$

Bestimmungsgleichung für h

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = c_1^2 + c_2^2 = k_{tr}^2 + \gamma^2 = h^2$$

Grenzwellenlänge im Hohlleiter

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{h} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (= 2a)$$

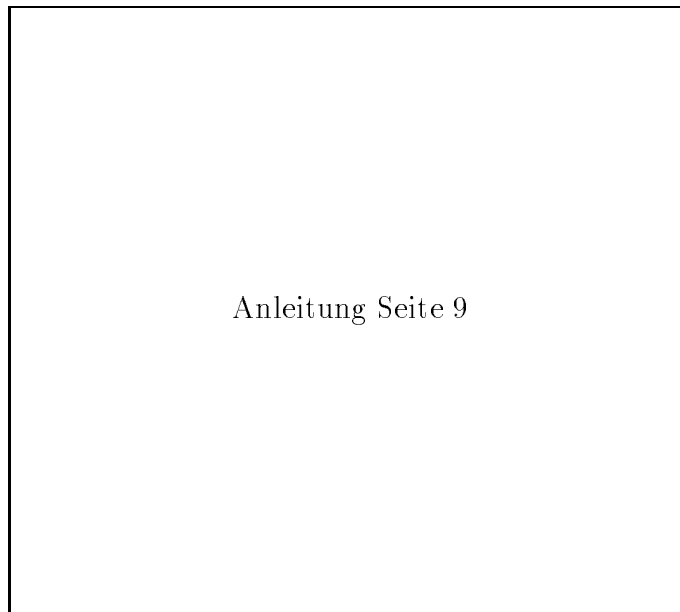
# Messung der Hohlleiter–Wellenlänge

## Versuchsaufbau

Tabelle 1 Hohlleiter–Wellenlänge

|                     | Einheit | $\nu = 9450 \pm 2.5$ [MHz] | $\nu = 9550 \pm 2.5$ [MHz] |
|---------------------|---------|----------------------------|----------------------------|
| $\lambda_0$         | [mm]    | $31.72 \pm 0.08$           | $31.39 \pm 0.08$           |
| $\lambda_c$         | [mm]    | 45.72                      | 45.72                      |
| $\lambda_g$ theor.  | [mm]    | $44.06 \pm 0.04$           | $43.18 \pm 0.04$           |
| $\lambda_g$ gemess. | [mm]    | $44.1 \pm 2$               | $43.4 \pm 2$               |

## Impedanz (Theorie)



Anleitung Seite 9

Abb.5 Stehende Wellen

### Impedanz

$$Z_{HF} = \frac{|\vec{E}_{tr}|}{|\vec{H}_{tr}|} = Z_F \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

### Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_t e^{i\beta z} + \vec{E}_r e^{-i\beta z} \quad \vec{H} = \vec{H}_t e^{i\beta z} - \vec{H}_r e^{-i\beta z}$$

$$Z(z) = Z_{0g} \left( \frac{e^{i\beta z} + \delta e^{-i\beta z}}{e^{i\beta z} - \delta e^{-i\beta z}} \right)$$

Bei Kurzschluß ( $\delta = -1$ )

$$Z(z) = Z_{0g} i \tan(\beta z) = Z_{0g} i \tan\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g}\right)$$



## Smith'sches Diagramm

Impedanz

$$Z(z) = Z_{0g} \frac{1 - \delta e^{-2i\beta z}}{1 + \delta e^{-2i\beta z}}$$

Stehwellenverhältnis

$$s = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1 + |\delta|}{1 - |\delta|} \quad \Rightarrow \quad |\delta| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Zerlegung

$$\frac{Z_{HF}}{Z_F} := r + ix \quad \delta e^{-2i\beta z} = u + iv$$

Kreisgleichungen

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1+r)^2}$$
$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

# Impedanzmessung

## Versuchsaufbau

Tabelle 2 Meßergebnisse

| Größe                              | Einheit      | 4 [mm]                      | 7.98 [mm]            |
|------------------------------------|--------------|-----------------------------|----------------------|
| $\lambda_g$                        | [mm]         | $42.9 \pm 2$                | $43.7 \pm 2$         |
| $z_{min}$                          | [mm]         | $108.7 \pm 1$               | $101.1 \pm 1$        |
| $z_{min0}$                         | [mm]         | $1.45 \pm 1$ !!!            | $13.7 \pm 1$         |
| $U_{max}$                          | [mV]         | $14.8 \pm 0.4$              | <i>ca.</i> $4 \pm 1$ |
| $U_{min}$                          | [mV]         | $1.38 \pm 0.4$              | <i>ca.</i> 0         |
| $SWR$                              | [1]          | $30.7 \pm 3.1$              | $\infty$             |
| $\frac{\lambda_{min0}}{\lambda_g}$ | [1]          | $0.034 \pm 0.024$ !!!       | $0.314 \pm 0.024$    |
| $\frac{R}{Z_{0g}}$                 | [1]          | $0.1 \pm 0.069$             | 0                    |
| $\frac{X}{Z_{0g}}$                 | [1]          | $-0.22 \pm 0.15$            | $2.3 \pm 0.17$       |
| $Z$                                | [ $\Omega$ ] | $52(\pm 36) - i113(\pm 78)$ | $i1190(\pm 91)$      |

## Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r$



Kittel S.428 Bild 8

Abb.6 Frequenzabhängigkeit der Polarisierbarkeit

Im Vakuum:  $\epsilon_r = 1$ , in Materie  $\epsilon_r > 1$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

Zusammenhang mit Polarisierung

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad \chi_e = \frac{P}{E} \quad P = P(E, T, \omega)$$

Harmonischer gedämpfter Oszillator

$$\ddot{\vec{p}}_n + \Gamma_n \dot{\vec{p}}_n + \omega_n^2 \vec{p}_n = b_n \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{p}_n(t) = \vec{p}_{0n} e^{-i\omega t} \quad \vec{p}_{0n} = \frac{b_n}{(\omega_n^2 - \omega^2) - i\Gamma_n \omega} \vec{E}_0$$

$$\vec{P}_{ges} = \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{(\omega_n^2 - \omega^2) - i\Gamma_n \omega} \vec{E}_0$$

Polarisation in Frequenzabhängigkeit

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{(\omega_n^2 - \omega^2) - i\Gamma_n \omega} \vec{E}_0$$

## DK-Messung im vollständig gefüllten Hohlleiter

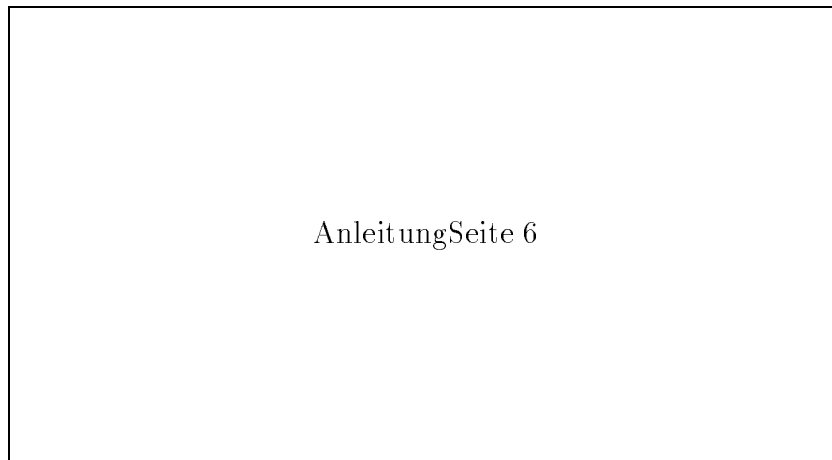


Abb.7 Vollständig gefüllter Hohlleiter

$$\frac{Z_{0g0}}{Z_{0g\epsilon}} = \frac{\lambda_{g0}}{\lambda_{g\epsilon}}$$

$$Z_{ohne}(L + d) = Z_{mit}(L)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{2\pi(d+L)}{\lambda_{g0}}\right)}{\frac{2\pi L}{\lambda_{g0}}} = \frac{\tan\left(\frac{2\pi L}{\lambda_{g\epsilon}}\right)}{\frac{2\pi L}{\lambda_{g\epsilon}}} := \frac{\tan(x)}{x}$$

Ergebnis

$$er = \left( \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 + \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right) \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}$$

# DK-Messung im vollständig gefüllten Hohlleiter

## Versuchsaufbau

Tabelle 3 Meßergebnisse

| Material         | L [mm]         | d [mm]       | $\lambda_{g\epsilon}$ [mm] | $\epsilon_r$ [1] | Lit.      |
|------------------|----------------|--------------|----------------------------|------------------|-----------|
| Teflon           | $8.8 \pm 0.1$  | $9.17 \pm 1$ | $23.8 \pm 2.5$             | $2.2 \pm 0.3$    | 2.0       |
| PVC              | $7.9 \pm 0.1$  | $10.7 \pm 1$ | $20.6 \pm 2.1$             | $2.8 \pm 0.5$    |           |
| Plexiglas        | $10.0 \pm 0.1$ | $10.9 \pm 1$ | $21.2 \pm 2.8$             | $2.6 \pm 0.6$    |           |
| Polystyrol       | $10.2 \pm 0.1$ | $10.7 \pm 1$ | $21.4 \pm 2.8$             | $2.6 \pm 0.6$    | 2.3...2.5 |
| Araldit          | $10.0 \pm 0.1$ | $11.5 \pm 1$ | $20.0 \pm 2.7$             | $2.9 \pm 0.7$    |           |
| Pertinax         | $10.2 \pm 0.1$ | $13.4 \pm 1$ | $16.9 \pm 1.8$             | $3.9 \pm 0.7$    | 3.5...5.5 |
| Holz $\parallel$ | $9.9 \pm 0.1$  | $10.7 \pm 1$ | $21.9 \pm 2.8$             | $2.5 \pm 0.5$    |           |
| Holz $\perp$     | $10.0 \pm 0.1$ | $10.3 \pm 1$ | $22.3 \pm 2.8$             | $2.4 \pm 0.5$    |           |

# DK-Messung im freien Raum

## Phasenverschiebung durch Platte

Gesetz von Snellius

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n$$

Gangunterschied  $\leftrightarrow$  Phasenverschiebung

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$$

Phasenverschiebung

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{nd}{\cos(\beta)} - \frac{d}{\cos(\beta)} \cos(\alpha - \beta) \right)$$

Ergebnis

$$\epsilon_r = n^2 = \left( \frac{\lambda\phi}{2\pi d} + \cos \alpha \right)^2 + \sin^2 \alpha$$

Im Experiment ( $\alpha = 45^\circ$ )

$$\epsilon_r = \left( \frac{c_0\phi}{2\pi\nu d} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

# DK-Messung im freien Raum

## Versuchsaufbau

Tabelle 4 Meßergebnisse

| Material   | $\Delta\phi[2\pi]$ | $d[mm]$        | $\epsilon_r$  | Literatur   |
|------------|--------------------|----------------|---------------|-------------|
| Polystyrol | $2.18 \pm 0.17$    | $10.1 \pm 0.1$ | $3.7 \pm 0.3$ | 2.3 ... 2.5 |
| Plexiglas  | $2.36 \pm 0.17$    | $11.8 \pm 0.1$ | $3.4 \pm 0.2$ |             |
| Pertinax   | $2.71 \pm 0.17$    | $9.6 \pm 0.1$  | $5.2 \pm 0.4$ | 3.5 ... 5.5 |
| Trovidur   | $1.92 \pm 0.17$    | $7.7 \pm 0.1$  | $4.2 \pm 0.4$ |             |

# Doppler

Versuchsaufbau

Frequenzverschiebung

$$\nu_D \cong \nu \left(1 - \frac{v}{c_0}\right)^2 \cong \nu \left(1 - 2\frac{v}{c_0}\right)$$

Schwebungsfrequenz

$$\nu_{Schwebung} = \frac{\nu - \nu_D}{2}$$

Geschwindigkeit des Autos

$$v = c \frac{\nu_{Schwebung}}{\nu}$$