Lösungsvorschläge zur 9. Übung

Aufgabe 36

Man betrachte folgende Abbildung:

Abb.1 zur Aufgabe 36

Sei p ein beliebiger Knoten im Baum mit zwei Kindern. Der Nachfolger von p liegt nach Definition des Successor–Algorithmus im rechten Teilbaum. Sei q dieser Nachfolger. Annahme: q hat ein linkes Kind k. Dann gilt, weil k im linken Teilbaum von q liegt: $key(k) < key(q)$. Außerdem gilt, weil k im rechten Teilbaum von p liegt: $key(p) < key(k)$. Demnach ist

$$key(p) < key(k) < key(q)$$

d.h. der Schlüssel von k *zwischen* den von p und q. Dann kann aber q nicht der direkte Successor von p sein. Widerspruch! Der andere Fall für den linken Sohn von p ist symmetrisch.

Achtung: die obigen Aussagen sind nur richtig, weil alle Schlüssel als verschieden angenommen wurden. Kommen gleiche Schlüssel vor, so gehen u.U. die Ungleichungen von $<$ in $\leq$ über und es resultiert nicht notwendigerweise ein Widerspruch.

Aufgabe 37

Sei n die Anzahl der inneren Knoten. Die wenigsten inneren Knoten hat ein RS–Baum, wenn er nur aus schwarzen Knoten besteht. In diesem Fall ist die Schwarz–Höhe $bh(T)$ identisch mit der normalen Höehe $h(T)$. Es ergibt sich $n \geq 2^{bh(T)} - 1$.

Die meisten inneren Knoten hat der RS–Baum, wenn er 'schichtenweise' aus abwechselnd roten und schwarzen Blättern aufgebaut ist. Man kann auf diese Weise bei gleicher Schwarz–Höhe die tatsächliche Höhe des Baumes verdoppeln: $h(T) = 2bh(T)$. Damit folgt die maximale Anzahl an inneren Knoten: $n \leq 2^{2bh(T)} - 1$.

Aufgabe 39

Zur Kontrolle sind im folgenden alle Schritte verzeichnet. Rote Knoten sind fett umrandet.

Abb.2 Einfügevorgänge

Abb.3 Löschvorgänge

Aufgabe 40

Sei im folgenden n die Anzahl der Knoten.

zu a)

Trick bei der Aufgabe ist zu sehen, daß Φ Lösung der quadratischen Gleichung

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \tag{1}$$

ist. Dies erhält man durch nachrechnen! Es ist nun zu zeigen:

$$\bigwedge_{n \geq 1} \Phi^{n-2} \leq F_n \leq \Phi^{n-1} \tag{2}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n.

Verankerung für $n = 1$ und $n = 2$

Es muß zweimal verankert werden, da wir später im Induktionsschritt für n auf die Aussagen von $n - 1$ und $n - 2$ zurückgreifen müssen. Φ Einsetzen und für beide Fälle nachrechen!

Induktionsschritt $(n-2),(n-1) \Longrightarrow n$

Gelte die Aussage für $n-2$ und $n-1$, d.h.

$$\Phi^{n-4} \leq F_{n-2} \leq \Phi^{n-3} \tag{3}$$

$$\Phi^{n-3} \leq F_{n-1} \leq \Phi^{n-2} \tag{4}$$

Durch Addition von (3) und (4) sowie durch Ausklammern von Φ^{n-4} (links) bzw. Φ^{n-3} (rechts) erhält man:

$$\Phi^{n-4}\underbrace{(1+\Phi)}_{\overset{1}{=}\Phi^2} \leq \underbrace{F_{n-1}+F_{n-2}}_{F_n} \leq \Phi^{n-3}\underbrace{(1+\Phi)}_{\overset{1}{=}\Phi^2}$$

Demnach gilt die Aussage (2) auch für n. $\square$

zu b)

Die maximale Anzahl an Knoten hat ein AVL–Baum, wenn er einen vollen binären Baum darstellt, d.h.

$$n \leq 2^{h+1} - 1 \tag{5}$$

Für die minimale Anzahl benutzt man die Folge der Fibonacci–Zahlen und folgende Überlegungen für die Durchführung einer Induktion.

Abb.4 Bildungsvorschrift für minimale AVL-Bäume

- Für einen Baum der Höhe 0 gibt es nur eine Möglichkeit (siehe Abb.4a).
- Für einen Baum der Höhe 1 gibt es nur zwei Möglichkeiten, die allerdings symmetrisch sind (siehe Abb.4b).
- Für einen Baum der Höhe k mit Wurzel und Teilbäumen T_l und T_r betrachte Abb.4c. Eine der beiden Teilbäume muß die Höhe $k-1$ haben (hier oBdA T_l). Der andere Teilbaum kann entweder die Höhe $k-1$ oder $k-2$ haben, damit die Voraussetzung der AVL–Struktur erfüllt ist. Wir sind jedoch an der *minimalen* Knotenanzahl interessiert. Deswegen werden wir den *kleineren* Teilbaum mit Höhe $k-2$ nehmen. Der minimale Teilbaum der Höhe k setzt sich demnach rekursiv zusammen aus den minimalen Teilbäumen der Höhen $k-1$ und $k-2$.

Führt man obige Vorschrift für einige kleine Höhen durch, so erhält man für die minimale Anzahl $n(h)$:

$$n(h) \geq F_{h+3} - 1 \tag{6}$$

Beweis durch vollständige Induktion über die Höhe h.

Verankerung für $h = 0$ und $h = 1$

Der minimale Baum der Höhe 0 hat einen Knoten und es gilt $F_{0+3} - 1 = 2 - 1 = 1$. Der minimale Baum der Höhe 1 hat zwei Knoten und es gilt $F_{1+3} - 1 = 3 - 1 = 2$.

Induktionsschritt für $(h-2), (h-1) \Longrightarrow h$

Sei Höhe h beliebig aber fest gegeben. Nach obiger Überlegung erhält man den minimalen Baum dieser Höhe, in dem man die minimalen Bäume für die Höhen $h-1$ und $h-2$ als Teilbäume an die neue Wurzel anhängt. Es gilt:

$$\begin{aligned} n(h) &\geq n(h-1) + n(h-2) + 1 \\ &\overset{I.V.}{\geq} F_{h-1+3} - 1 + F_{h-2+3} - 1 + 1 \\ &= \underbrace{F_{h-2+3} + F_{h-2+3}}_{F_{h+3}} - 1 \end{aligned}$$

Damit gilt (6) für h.

zu c)

Die Aussage dieser Teilaufgabe erhält man durch Umformen und Logarithmieren der Ungleichungen (5) und (6). Desweiteren benuzt man die Identität:

$$\log_\Phi(x) = \log_\Phi(2)\log_2(x)$$

sowie die linke Seite der Ungleichung (2)

$$F_{h+3} \geq \Phi^{h+1}$$