3. Übung Numerik I

Harald Mika Marcus Rickert

6. Mai 1991

Aufgabe 9

Zu Teil (1)

Es gilt

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{j=0}^{n-(n+1)} b_{m+j} q_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{-1} b_{m+j} q_j(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{j=0}^{n-n} b_{n+j} q_j(x) \\ &= b_n \underbrace{q_0(x)}_{=1} \\ &= b_n. \end{aligned}$$

Zu Teil (2)

Für diesen Teil gilt die folgende Definition

$$s_m^{n+1} := \sum_{j=0}^{n-m} b_{m+j} q_j(x).$$

Beweis von (2) durch vollständige Induktion über n.

Verankerung für $n = 1$

Für $n = 1$ kann nur gelten: $m = 0$. Damit folgt:

$$s_m^1(x) = \sum_{j=0}^{1-0} b_{0+j} q_j(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= b_m + q_0(x)\\
&= b_m\\
&= b_m + r_1 x s_{m+1}(x) + r_2 s_{m+2}(x)
\end{aligned}
$$

weil $s_{m+1}(x)$ und $s_{m+2}(x)$ nach Definition keine Summanden mehr enthalten.

Induktionsschritt $(n \Longrightarrow n+1)$

Gelte die Aussage für n. Es folgt dann mit $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ beliebig:

$$
\begin{aligned}
s_m^{n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{(n+1)-m} b_{m+j} q_j(x)\\
&\stackrel{\text{Ind.Vor.}}{=} \left(\sum_{j=0}^{n-m} b_{m+j} q_j(x)\right) + b_{m+n+1-m} q_{n+1-m}(x)\\
&= s_m^n(x) + b_{n+1} q_{n+1-m}(x)\\
&= b_m + r_1 x s_{m+1}^n(x) + r_2 s_{m+2}^n(x) + b_{n+1} q_{n+1-m}(x)\\
&= b_m + r_1 x \left(\sum_{j=0}^{n-(m+1)} b_{m+1} + j q_j(x)\right) + r_2 \left(\sum_{j=0}^{n-(m+2)} b_{(m+2)+j} q_j(x)\right) +\\
&\quad + b_{n+1}(r_1 x q_{n-m}(x) + r_2 q_{n-m-1}(x))\\
&= b_m + r_1 x \left(b_{m+1+((n+1)-(m+1))} q_{(n+1)-(m+1)} + \sum_{j=0}^{n-(m+1)} b_{m+1+j} q_j(x)\right) +\\
&\quad + r_2 \left(b_{m+2+((n+1)-(m+2))} q_{(n+1)-(m+2)} + \sum_{j=0}^{n-(m+2)} b_{m+2+j} q_j(x)\right)\\
&= b_m + r_1 x \left(\sum_{j=0}^{(n+1)-(m+1)} b_{m+1+j} q_j(x)\right) + r_2 \left(\sum_{j=0}^{(n+1)-(m+2)} b_{m+2+j} q_j(x)\right)\\
&= b_m + r_1 x s_{m+1}^{n+1}(x) + r_2 s_{m+2}^{n+1}(x)
\end{aligned}
$$

Also gilt die Aussage auch für $n+1$.

Zu Teil (3)

Beweis von (3) durch volständige Induktion über j.

Verankerung für $j = 0$

$$1 = p_0(x) = \underbrace{q_0(x)}_{=1} + r_0 x \underbrace{q_{-1}(x)}_{=0}$$

Induktionsschritt $j \Longrightarrow j+1$

Gelte die Aussage für j. Es folgt:

$$\begin{aligned} p_{j+1}(x) &= r_1 x p_j(x) + r_2 p_{j-1}(x) \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} r_1 x (q_j(x) + r_0 x q_{j-1}(x)) + r_2 (q_{j-1}(x) + r_0 x q_{j-2}(x)) \\ &= r_1 x q_j(x) + r_2 q_{j-1}(x) + r_0 x (r_1 x q_{j-1} + r_2 q_{j-2}) \\ &= q_{j+1} + r_0 q_j \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für $j+1$.

Zu Teil (4)

Für diesen Teil gilt die Definition

$$p^n := \sum_{j=0}^{n} b_j p_j(x).$$

Beweis von (4) durch vollständige Induktion über n.

Verankerung für $n = 0$

$$\begin{aligned} p^0(x) &= \sum_{j=0}^{0} b_j p_j(x) \\ &= b_0 p_0(x) \\ &= b_0 \\ &= \left(\sum_{j=0}^{0-0} b_{0+j} q_j(x) \right) + r_0 x \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{0-1} b_{0+j} q_j(x) \right)}_{=0} \\ &= s_0(x) + r_0 x s_1(x) \end{aligned}$$

Induktionsschritt $n \Longrightarrow n+1$

Gelte die Aussage für n. Es folgt:

$$\begin{aligned} p^{n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{n+1} b_j p_p(x) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} b_j p_j(x) \right) + b_{n+1} p_{n+1}(x) \\ &= p^n(x) + b_{n+1} p_{n+1}(x) \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} s_0^n(x) + r_0 x s_1^n(x) + b_{n+1} p_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=0}^{n} b_j q_j(x)\right) + r_0 x \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_{1+j} q_j(x)\right) + b_{n+1}(q_{n+1}(x) + r_0 x q_n(x)) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n+1} b_j q_j(x)\right) + r_0 x \left(\sum_{j=0}^{n} b_{1+j} q_j(x)\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n+1} b_j q_j(x)\right) + r_0 x \left(\left(\sum_{j=0}^{n+1} b_{1+j} q_j(x)\right) - \underbrace{b_0 q_{-1}(x)}_{=0}\right) \\
&= \sum_{j=0} n + 1 b_j (q_j(x) + r_0 x q_{j-1}(x)) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} b_j p_j
\end{aligned}
$$

Also gilt die Aussage auch für $n+1$.

Aufgabe 10*

Die Aufgabe wird durch vollständige Induktion über n bewiesen.

Verankerung für $n = 1$

Für $n = 1$ ergibt sich der Vektorraum $V_1 := \mathrm{spann}\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\}$ mit $\dim V = 1$. Sei nun $v \in V_1$ beliebig mit $v \neq 0$ und $v = (a_1)$. Es folgt:

$$v \text{ hat Nullstelle} \Longleftrightarrow a_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = 0$$

Da laut Voraussetzung $a_1 \neq 0$ und die Exponentialfunktion keine reelle Nullstelle hat, besitzt demnach auch v keine Nullstelle, und damit höchstens $n - 1 = 0$ viele.

Induktionsschritt $n \Longrightarrow n+1$

Gelte die Aussage nun für n und sei der Vektorraum $V_{n+1} := \mathrm{spann}\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_{n+1} t}\}$ mit paarweise verschiedenen λ_i gegeben. Ferner sei $v_{n+1} \in V_{n+1}$ beliebig mit $v = (c_1, \ldots, c_{n+1})$ und $v \neq 0$. Es ist zu zeigen, daß v und damit der Term

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j \mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

höchstens n Nullstellen hat. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{e}^{\lambda_i t} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \underbrace{\left(c_1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{n+1} c_j \mathrm{e}^{(\lambda_j - \lambda_1)t}}_{=:f(t)} \right)}_{=:g(t)}$$

Die Funktion $f(t)$ besitzt die Ableitung

$$f'(t) = \sum_{j=2}^{n+1} c_j(\lambda_j - \lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_1)t},$$

die einen Vektor $v* \in V_n^*$ darstellt mit $V_n^* := \mathrm{spann}\{\mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_2)t}, \ldots, \mathrm{e}^{(\lambda_j-\lambda_{n+1})t}\}$ und $v^* := (c_2(\lambda_2 - \lambda_1), \ldots, c_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)$. Da gilt $\dim V = n$, hat laut Induktionsvoraussetzung $f'(t)$ höchstens $n-1$ Nullstellen. Seien nun $x_{E_1}, \ldots, x_{E_{n-1}}$ diese höchstens $n-1$ Nullstellen (o.B.d.A wird angenommen, daß die maximale Anzahl von Nullstellen vorliegt, diese alle paarweise verschieden und schon aufsteigend sortiert sind). Sie teilen die reellen Zahlen in n disjunkte Intervalle I_j mit

$$I_j := \begin{cases}]-\infty, x_{E_1}[& \text{für } j = 1 \\ [x_{E_j}, \infty[& \text{für } j = n-1 \\ [x_{E_{j-1}}, x_{E_j}[& \text{sonst} \end{cases}$$

in denen die Funktion f jeweils monoton verläuft. Wegen der Stetigkeit kann sie in jedem I_j höchstens *einmal* den Wert $-c_1$ annehmen, d.h. die Funktion g hat höchstens n Nullstellen. Da aber wie schon oben erwähnt der Term $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ keine Nullstellen hat, besitzt demnach v_{n+1} höchstens n Nullstellen. Also gilt die Aussage auch für $n+1$.

Aufgabe 11

Lösung durch Hermite–Interpolation:

Tabelle 1 Hermite-Schema

x_i	$y[z_j]$				
0	5				
		3			
0	5		-2		
		1		-1	
1	6		-3		2
		-2		1	
1	6		-2		
		-2			
1	6				

Es ergibt sich das Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= 5 + 3(x-0) - 2(x-0)^2 - (x-0)^2(x-1) + 2(x-0)^2(x-1)^2 \\ &= 5 + 3x - 2x^2 - x^3 + x^2 + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 \\ &= 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$